NOCIONES BÁSICAS DE TOPOLOGÍA PARA LA GENERACIÓN DE FORMAS COMPLEJAS

LUCAS PERÍES

Dirección: Facultad de Arquitectura, Universidad Católica de Córdoba, Av. Armada Argentina 3555, Córdoba, X5016DHK, Argentina. *E-mail:* perieslucas@gmail.com

*La presente ponencia se desprende del marco teórico de la tesis doctoral "**Estereotomía topológica como instrumento innovativo en la configuración morfológica del paisaje urbano-arquitectónico**", desarrollada en el Programa de Doctorado de la Universidad de Buenos Aires (FADU-UBA), bajo la dirección de Inés Moisset y Eduardo Maestripieri. El trabajo ha sido realizado con la cooperación económica de la Universidad Católica de Córdoba. En este escrito se sintetizan aquellas nociones fundamentales de la geometría topológica, los conceptos y principios teórico-constructivos que son susceptibles de ser transferidos a los procesos de generación formal del diseño, al mismo tiempo que de análisis de la forma. Los fundamentos planteados están orientados a la producción de nuevos principios compositivos asociados de modo directo con las lógicas de la topología para la producción de formas complejas.*

1 TOPOLOGÍA

La topología es una de las áreas más recientes de la matemática. Surge en el siglo XVII con el nombre de *"analysis situs"* (análisis de la posición) y recibe gran impulso entre el siglo XIX y el XX. La invención del término "topología" corresponde al matemático alemán Johann Benedict Listing, en su libro *Estudios preliminares de topología* de 1847. La etimología proviene de raíces griegas, derivando de los componentes léxicos *"topos"* (lugar) y *"logos"* (estudio), sumando el sufijo -ia (acción, cualidad, condición). La topología estudia las propiedades y las funciones continuas de las figuras, cuerpos y espacios geométricos, que no se ven alterados por transformaciones continuas, biyectivas (las aplicaciones de un conjunto en otro cuya correspondencia inversa es también una aplicación) y homomorfismos (correspondencia no biunívoca entre dos estructuras algebraicas que conserva las operaciones).
Los orígenes de este conocimiento están asociados a la obra de Leonhard Euler, Georg Cantor, August Möbius y Felix Klein, entre otros matemáticos que desarrollan el campo de la geometría no euclídea. Möbius descubre la superficie unilateral como la "cinta de Moebius". Klein también estudia superficies topológicas y se le adjudica la creación de la "botella de Klein". Cantor plantea la "teoría de conjuntos" y Euler desarrolla la "teoría de grafos".

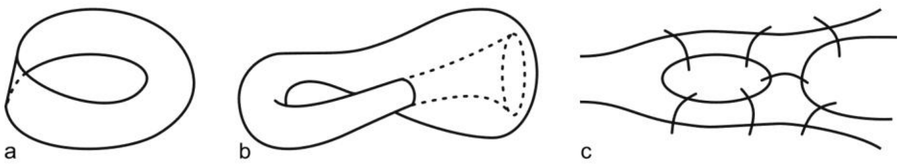

Figura 1: a- Cinta de Moebius, Listing y Möbius, 1858. b- Botella de Klein, 1882. c- Problema de los siete puentes de Königsberg, teorema de teoría de grafos, Euler, 1736 (Reconstrucción Períes).

Desde el mundo griego hasta finales del siglo XIV ningún matemático pone en duda la veracidad de la geometría de Euclides. Hasta que en 1697, Giolamo Saccheri cuestiona el quinto postulado de Euclides (si una recta incide sobre otras dos formando ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontrarán por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos), desencadenando el surgimiento de las geometrías no euclidianas.

A principio del siglo XIX, Ferdinand Karl Schweikart hace una distinción clara entre dos geometrías: la de Euclides y aquella en la que se verifica que la suma de los ángulos de un triángulo es distinta a 180°. Carl Friedrich Gauss (contemporáneo de Schweikart) es quien desarrolla una nueva geometría primeramente bautizada como “antieuclídea” y finalmente denominada “**no-euclídea**”, dentro de la que se inscribe la topología.
La topología es entendida conceptualmente como una geometría "cualitativa", ya que deja de lado las nociones cuantitativas como: longitud, ángulo, área, volumen (propias de las geometrías clásicas), centrada en nociones cualitativas como proximidad, consistencia, conectividad, compacidad, bordes, agujeros, etc. Amster plantea al respecto que “Este aspecto tan flexible de la topología justifica el nombre coloquial con que también se la conoce: geometría del caucho.” (2010, p. 17). La topología se aparta del ámbito del análisis numérico e incluso del análisis estrictamente matemático, aporta las herramientas básicas y los conceptos teóricos para responder al problema desde un punto de vista cualitativo y conceptual, ocupándose de las **estructuras formales**. Estudia los procesos de generación y las relaciones entre los objetos, en lugar de su estructura dimensional. Su interés radica en saber si las figuras bidimensionales o tridimensionales tienen huecos o vacíos, si son continuas, si poseen intersecciones, si las partes están interconectadas o existen regiones separadas y, principalmente, si un objeto puede deformarse y transmutar hasta convertirse en otro con el mismo carácter formal. Esta última característica denominada **homeomorfismo** (del griego *homoios* (misma) y *morphe* (forma)), estudia las propiedades que se conservan a través de las transformaciones continuas, que surgen de acciones trasformadoras, sin separar lo que se encontraba unido, ni unir lo que estaba separado.
La **homotopía** (del griego *homos* (mismo) y *topos* (lugar)) caracteriza el concepto esencial de la topología, en referencia al principio continuo de las deformaciones. Por consiguiente, la deformación topológica de un segmento de recta da por resultado una curva simple abierta y una circunferencia se puede transformar en una curva simple cerrada. Una circunferencia también es equivalente a un cuadrado y una esfera es equivalente a un cubo, son figuras topológicamente equivalentes (homeomorfas) porque se puede transfigurar una en la otra mediante una transformación continua y reversible (homotópica). Pero un círculo no puede ser equivalente a un segmento, dado que implicaría cortar la circunferencia para obtenerlo.

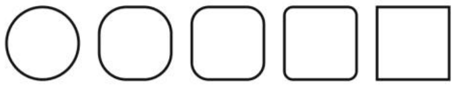

Figura 1: Homeomorfismo círculo-cuadrado.

Figura 3: Transformación de taza en toroide.

En la geometría euclídea dos figuras o cuerpos serán equivalentes si se transforma uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área, volumen, etc. En la geometría topológica, las equivalencias se desarrollan en un sentido más amplio. Las figuras u objetos han de tener el mismo número de puntos, de trozos, de huecos, de intersecciones, etc., y las medidas de ángulo, longitud, área o volumen pueden ser variables infinitamente. La topología estudia solo esas propiedades de las formas que son intercambiables bajo **transformaciones continuas reversibles**. Por “reversible” nos referimos a que al deshacer la transformación se debe volver al estado o condición anterior, existiendo continuidad. Los agujeros son componentes topológicos que no desaparecen en las deformaciones continuas reversibles. La explicación más corriente de este concepto es la comparación de un toroide con una taza de café, porque cada una tiene un agujero y un toroide se puede transformar en taza de café y sucesivamente la inversa.

El foco de atención se centra en la **continuidad**, las propiedades de las figuras u objetos que permanecen invariantes al ser deformadas, sin que surjan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Debe existir correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada. Las **invariantes topológicas** son las propiedades que se desarrollan cuando dos figuras pueden ser equivalentes al transformar a una de ellas en la otra, sin producir cortes. Si tomamos como ejemplo un toroide y lo deformamos en múltiples direcciones, para la topología seguirá siendo la misma figura geométrica dado que conserva un solo agujero y no incorpora otro elemento. En este caso, la invariante topológica de la operación transformadora es el único agujero.
En aspectos prácticos, la topología se ocupa de las redes, los grafos, los nudos, las entidades o figuras geométricas, sus continuidades y los saltos de dimensiones espaciales. A los fines morfológicos del diseño, nos interesan las figuras geométricas y, en particular, la topología de las superficies. La clasificación de estas entidades responde a las siguientes propiedades: **superficies con bordes** o **sin bordes**, **superficies orientables** o **no orientables** y **superficies básicas** (las que por homeomorfismo o suma conexa generan otras figuras). Propiedades que desarrollaremos a continuación.
El matemático Vieira Sampaio (2008) establece cuatro operaciones de transformación aplicables a superficies planas o a partes de ellas: **estirar** o inflar, **encoger** o contraer, **doblar** y **cortar**, esta última con la condición de que alguno de los bordes cortados sea pegado para producir continuidad. Al emplear o combinar cualquiera de las tres acciones primeras, para la transformación de una superficie, la figura inicial resulta homotópica de la figura final, según el concepto de homeomorfismo. Con la acción **corte-pegado** la superficie final no responde directamente al principio homeomórfico, pero en topología, la acción de pegar deshace las líneas de los bordes, transformando en figuras continuas a dos superficies separadas o fragmentos de las mismas.

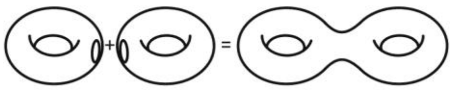

Figura 4: Trasformación de continuidad por corte y pegado.

Figura 5: Suma conexa de dos toros: bitoro.

Los casos planteados se corresponden con **superficies abiertas** derivadas de planos que poseen bordes, como por ejemplo el disco, el rectángulo o la cinta de Moebius. Una esfera o un toroide son **superficies cerradas** porque no poseen ningún borde, mientras que pueden ser subdivididas en un número finito de triángulos (demostración realizada por Tibor Radó en 1925, que completa el teorema de clasificación iniciado en 1888 por Walther von Franz Anton Dyck).
Una alternativa para la generación de superficies topológicas corresponde a la sumatoria de entidades, bajo la denominación de **superficies compuestas**, derivadas del teorema de clasificación (el cual enuncia que toda superficie cerrada se puede obtener a partir de sumas conexas de la esfera, del toro y del plano proyectivo real). La **suma conexa** de dos superficies cerradas se produce al unir o empalmar dos variedades de la misma dimensión cerca de un punto escogido en cada una de ellas, haciendo agujeros en las superficies y pegando el borde resultante en una de ellas con el de la otra. Si se quisiera sumar dos esferas en términos topológicos, se debería recortar una circunferencia en la superficie de ambas y estirarlas para pegarlas por los bordes de los agujeros. Si en este caso, la figura producida es trasformada hasta darle una forma redondeada, el resultado sería nuevamente el de una esfera. El mismo procedimiento se puede realizar con los toroides. La suma conexa de dos toros da por resultado un toro con dos agujeros (bitoro) y así sucesivamente.

Plantearemos ahora la **topología combinatoria**, aquella que reduce el estudio de curvas y superficies a esquemas determinados por polígonos curvilíneos, evitando los tratamientos de la topología conjuntista. El proceso combinatorio es más cercano al álgebra, y reduce el concepto de homeomorfismo a unas pocas reglas que permiten decidir cuándo dos esquemas combinatorios son equivalentes. Un área específica de la topología que trabaja sobre la generación de superficies desde planos curvados y pegados. Las superficies se definen de modo práctico e intuitivo a partir de la unión de los bordes de polígonos curvilíneos, en el espacio tridimensional euclídeo. La construcción de un toroide, por ejemplo, se inicia con un rectángulo, uniendo sus bordes mayores uno con el otro, y vinculando las dos circunferencias producidas en los extremos. Después de la transformación topológica (desarrollada desde la curvatura y unión) el rectángulo desaparece, por consiguiente los bordes y los vértices para constituir el toro.

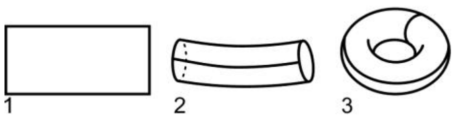

Figura 6: Construcción de un toroide por topología combinatoria.

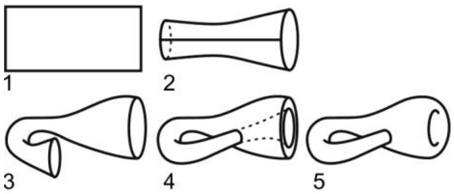

Figura 7: Construcción de una botella de Klein por topología combinatoria.

Para el caso de la botella de Klein, la construcción también se inicia con un plano rectangular y uniendo los lados mayores. Se genera un tubo cilíndrico que es contraído por el centro y estirado en una de las circunferencias de los extremos, para producir un retorcimiento desde la circunferencia menor, atravesando la superficie y posicionándose dentro del extremo mayor. La superficie se autointercepta y conecta las circunferencias para cerrarse, como se muestra en la ilustración 7.

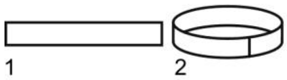

Figura 8: Construcción de un anillo por topología combinatoria.

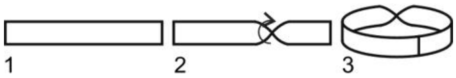

Figura 9: Construcción de una cinta de Moebius por topología combinatoria.

Pegar los extremos de un rectángulo alargado, en el formato de banda, permite generar un anillo. Si se orienta de modo distinto los extremos de la banda, aplicando una torsión de 180°, se obtiene una cinta de Moebius. Esta última figura posee un solo borde que se corresponde topológicamente con una circunferencia. El anillo en cambio posee dos bordes como circunferencias.

Con estos últimos dos procedimientos se plantea la condición de **bilateralidad** o **unilateralidad** de las superficies. Tanto las superficies abiertas como las cerradas pueden ser **orientables** o **no orientables**, es decir que poseen dos caras o una cara. Una superficie es no orientable cuando cuenta con un camino o trayectoria cerrada que no cambia la orientación al volver al punto de partida, como sucede en la cinta de Moebius y todas las superficies que la contienen en sí mismas. Las superficies que no contienen una cinta de Moebius son superficies orientables de dos caras, como la esfera o el toroide. Una superficie orientable y abierta puede adquirir mayor nivel de complejidad geométrica al aplicar las acciones de corte-pegado y torsión, para convertirla en no orientable, como se muestra en las siguientes ilustraciones.

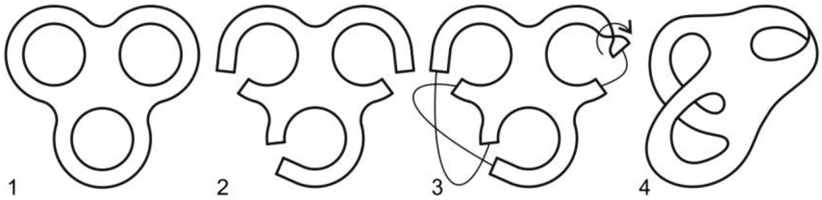

Figura 10: Superficies no orientables por corte-pegado y torsión.

Hasta aquí planteamos las nociones básicas de geometría topológica, principalmente las que pueden tener vinculaciones directas con la producción o el análisis formal en el amplio territorio del diseño.

Referencias

Amster, P. (2010). “*Apuntes matemáticos para leer a Lacan: 1 Topología”.* Buenos Aires: Letra Viva.
Sampaio, J. C. V. (2008). “*Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores”.* São Paulo: Edufscar.

NOTA:
El presente escrito es publicado en el libro de actas del X Congreso Nacional y VII Internacional de SEMA (Sociedad de Estudios Morfológicos de argentina) Entre formas: Teoría, investigación, concreciones y experiencias.

Para su citación:

Períes, L. (2015). Nociones básicas de topología para la generación de formas complejas. En A. Abaca (Ed.), Cuadernos de la forma 9 (pp. 154-157). Buenos Aires: SEMA.